Cavity Quantum Electro Dynamics
Sommerakademie Görlitz 2008

Nikolas Tezak

11.09.2008

Inhalt

Problematik

- Grundsätzliche experimentelle Schwierigkeit: Möglichst perfekte Kontrolle von quantenmechanischen Systemen
- konzeptionelle Einfachheit des Modells $\Leftrightarrow$ (meistens) schwierige experimentelle Umsetzung
- Isolation eines (interessanten) QM-Systems von der Umwelt sehr schwierig

Atome und Licht

- Kontrolle von einzelnen Atomen experimentell möglich
- Atome wechselwirken mit EM-Feld:
  $\Rightarrow$ Atome experimentell manipulierbar
  aber auch $\Rightarrow$ angeregte Zustände sind instabil oder metastabil
- Bessere Kontrolle von Atom-Licht-Wechselwirkung $\Rightarrow$ Q-Bit-Speicher

Atomare Zustände

- Ungestörtes Atom beschreibbar durch Hamiltonian $\hat{H}_a$
- Stationäre Schrödingergleichung $\hat{H}\left|\Psi\right\rangle = E\left|\Psi\right\rangle$
  $\Rightarrow \hat{H}$ diagonalisierbar:

$$\hat{H} = \sum_{nlm} E_n \left|n,l,m\right\rangle\left\langle n,l,m\right|$$

  Eigenspektrum und ONB $\{(E_n, \left|n,l,m\right\rangle)\}$
- Zeitentwicklung durch unitäre Evolution

$$\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t} = \sum_{nlm} e^{-iE_n t}\left|n,l,m\right\rangle\left\langle n,l,m\right|$$

$\Rightarrow$ Keine Übergänge zwischen verschiedenen Zuständen

Hinzunahme des Strahlungsfelds

- Beobachtung: Atomare Zustände können unter Emission von Licht in Grundzustand zerfallen
- Mathematische Beschreibung: Erweitere Hilbertraum um das quantisierte Strahlungsfeld (i.A. unendlich viele Moden/Freiheitsgrade) und Strahlungshamiltonian

$$\hat{H}_s = \sum_{k \in I} \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k = \sum_{k \in I} \omega_k \hat{N}_k$$

Eigenzustände = Fockzustände, d.h. Besetzungszahl jeder einzelnen Mode

$$|\gamma_{em}\rangle = \bigotimes_{k \in I} |n_k\rangle = |n_0, n_1, ...\rangle$$

Kopplung von Feld und Atom

- Kopple Atom und Strahlungsfeld (damit sie sich ‘sehen’) über Wechselwirkungsterm $\hat{H}_{ww}$

$$\hat{H} = \hat{H}_a + \hat{H}_s + \hat{H}_{ww}$$

- Die Produktzustände $|nlm\rangle \otimes |\gamma_{em}\rangle$ bilden zwar noch immer Basis für Hilbertraum, sind aber wegen $\hat{H}_{ww}$ keine **stationären** Lösungen mehr.
  $\Rightarrow$ Spontane Emission möglich, d.h. Atom und Strahlungsfeld können Energiequanten austauschen

Modendichte des EM-Feldes

- Unendlich ausgedehntes Volumen $\Rightarrow$ Kontinuum von EM-Moden unterschiedlicher Energie
- Für alle Übergangsenergien zwischen Energieniveaus des Atoms existiert EM-Mode, die ein Energiepaket aufnehmen kann
- Außer Grundzustand alle Zustände instabil (bis auf zusätzliche Auswahlregeln)

Elektrisches Feld in einer Kavität

- E-Dynamik: Kavität, also Hohlraum V mit ideal leitenden Wänden (Spiegeln) führt zu Randbedingungen an das EM-Feld:
$$\vec{E}(\vec{r} \in \partial V) \equiv 0$$
- Zahl möglicher Moden wird drastisch reduziert, Frequenzspektrum wird quasi diskret $\Rightarrow$ EM-Feld kann nicht mehr beliebige Energiequanten von einem im Hohlraum vorhandenen Atom aufnehmen!
$\Rightarrow$ können bestimmten atomaren Übergang selektieren, der mit Kavitätsmode resonant ist

Das Zwei-Zustandssystem: Der 'Pseudo'-Spin

- Einfachstes Nicht-Triviales QM-System: Zwei Zustände $|e\rangle \hat{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|g\rangle \hat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit Hamiltonian

$$\hat{H}_a \hat{=} \frac{\omega_{eg}}{2} (\hat{\sigma}_z + \mathbb{1}) = \frac{\omega_{eg}}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \omega_{eg} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit den Leiteroperatoren $\hat{\sigma}_\pm := \frac{\hat{\sigma}_x \pm i\hat{\sigma}_y}{2}$ folgt:

$$\hat{H}_a \hat{=} \omega_{eg} \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_-$$

- Das Energiespektrum ist also $\{0, \omega_{eg}\}$

Quantisierte EM-Feldmode in der Kavität: QM-Oszillator

- Die Kavitätsmode ist ein QM-Oszillator mit Fockzuständen $|n\rangle$

$$\hat{H}_c = \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} = \omega_c \hat{N}_c$$

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1}\, |n+1\rangle \text{ und } \hat{a}\, |n-1\rangle = \sqrt{n}\, |n\rangle$$

$$\hat{H}_c |n\rangle = \omega_c \hat{N}_c |n\rangle = n\omega_c |n\rangle$$

Das kombinierte ‘Spin-Spring’-System

- Atom in resonanter Kavität $\Rightarrow$ Dynamik entspricht Zwei-Zustand-System (Atom) gekoppelt an harmonischen Oszillator (Feldmode)
- Neue Basiszustände $\Rightarrow$ Produktzustände von $\{|g\rangle, |e\rangle\}$ und den Fock-Zuständen $\{|n\rangle \,|n = 0, 1, 2, ...\}$
- Wechselwirkungsterm zwischen Atom und Kavität (unter Vernachlässigung von Nicht-resonanten Termen):

$$\hat{H}_{ac} = \frac{-i\Omega_0}{2}\left(\hat{a}\hat{\sigma}_+ - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma_-}\right)$$

Dabei wurde die Vakuum-Rabi-Frequenz Ω_0 eingeführt. Im Falle des Atoms gilt:

$$\Omega_0 \propto \left\langle \vec{d}_{eg} \cdot \vec{E} \right\rangle$$

$\Rightarrow$ Ω_0 bestimmt durch Matrixelement des Dipoloperators und Feldstärke

Jaynes-Cummings-Modell

- Der gesamte Hamiltonian ist gegeben durch:

$$\hat{H} = \omega_{eg}\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- + \omega_c\hat{N}_c + \frac{-i\Omega_0}{2}\left(\hat{a}\hat{\sigma}_+ - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma_-}\right)$$

- Erhaltungsgröße: Die Gesamtzahl der atomaren und photonischen Anregungen.

$$\hat{N}_{ac} = \hat{N}_c + \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- \text{ ist erhalten, denn } [\hat{H}, \hat{N}_{ac}] = 0$$

- Außer Grundzustand $|g, 0\rangle$ (*Singulett*) koppeln immer genau zwei Niveaus (*Dublettzustände*):

$$|1_n\rangle := |e, n\rangle \text{ und } |0_n\rangle := |g, n+1\rangle$$

Lösung des Jaynes-Cummings-Modell

- In der neuen Basis $|1_n\rangle \hat{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|0_n\rangle \hat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ lässt sich der Hamiltonian auf dem Unterraum eines Dubletts einschränken:

$$\hat{H}_n = E_n \mathbb{1} + \frac{\delta}{2}\hat{\sigma}_z + \frac{\Omega_n}{2}\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} E_n + \frac{\delta}{2} & -i\frac{\Omega_n}{2} \\ i\frac{\Omega_n}{2} & E_n - \frac{\delta}{2} \end{pmatrix}$$

  mit $\delta = \omega_{eg} - \omega_c$, $E_n = n\omega_c + \frac{\delta}{2}$ und $\Omega_n = \Omega_0\sqrt{n+1}$

- Dieser wird unter Einführung des *Mischungswinkels* $\tan\Theta_n = \frac{\Omega_n}{\delta}$ von den folgenden Zuständen diagonalisiert:

$$|+\rangle = \cos\frac{\Theta_n}{2}\,|1_n\rangle + i\sin\frac{\Theta_n}{2}\,|0_n\rangle$$
$$|-\rangle = \sin\frac{\Theta_n}{2}\,|1_n\rangle - i\cos\frac{\Theta_n}{2}\,|0_n\rangle$$

Zeitliche Entwicklung: Quanten-Rabi-Oszillation

- Im Spezialfall $\delta = 0$ gilt $\Theta_n = \frac{\pi}{2}$

$$|\pm\rangle = \frac{|1_n\rangle \pm i\,|0_n\rangle}{\sqrt{2}}$$

- Gegegeben einen Zustand $|\Psi(t)\rangle$ mit $|\Psi(0)\rangle = |e, n\rangle = \frac{|+\rangle + i|-\rangle}{\sqrt{2}}$ folgt für die Wahrscheinlichkeit das System zu einem späteren Zeitpunkt t wieder in diesem Zustand anzutreffen:

$$P_e(t) = \left|\langle e, n|\,\hat{U}_n(t)\,|\Psi(t)\rangle\right|^2 = \cos^2\frac{\Omega_n}{2}t = \frac{1}{2} + \frac{\cos\Omega_n t}{2}$$

Abschließendes

- Gültigkeit des Jaynes-Cummings-Modells?
  $\Rightarrow$ starke Kopplung des EM-Feldes an den atomaren Übergang
  $\Rightarrow$ hohe Reflektivität der Kavitätenwände (Hohe Finesse)
- Experimentelle Erfolge?
  $\Rightarrow$ Nachweis der EM-Feld-Quantisierung (Brune, 1996)
  $\Rightarrow$ Quanteninformation (siehe nächster Vortrag)

Zusammenfassung und Ausblick

- Atome koppeln an das EM-Feld, wodurch Übergänge zwischen atomaren Zuständen möglich sind
- Durch Modifikation der Geometrie des Raumes (Hinzufügen von Spiegeln) ist es möglich, diese Prozesse stark zu selektieren und kontrollieren
- Das Jaynes-Cummings-Modell ist ein konzeptionell *extrem* einfaches Modell, das sich hier tatsächlich experimentell realisieren lässt. Dies ermöglicht Grundlegende Experimente zur QM.
- Q-Bit-Speicher: Photonen sind als zeitlich stabile 'Flying Q-Bits' sehr gut für die Übertragung von Quantenbits geeignet, aber schlecht für das Speichern. CQED eröffnet experimentelle Möglichkeiten, Q-Bits von Photonen auf Atome zu übertragen und umgekehrt.