Theoretische Physik V, Quanten-II: Übungsklausur

Übungsklausur zur Vorlesung "Quanten-II", gehalten von Jens Eisert an der Universität Potsdam, Physik, SS09. Für Rückfragen bitte Email an jense[at]qipc.org, timo.felbinger[at]qipc.org und albrecht[at]rz.uni-potsdam.de

Wichtige Vorbemerkung: Diese Übungsklausur ist nicht mit der gleichen pedantischen Sorgfalt auf Inkonsistenzen geprüft, wie es die Klausur sein wird. Keine Panik: Auch die Länge wird noch variieren: Die Erfahrungen mit der Übungsklausur werden in die endgültige Konzeption der Klausur eingehen. (70 Punkte)

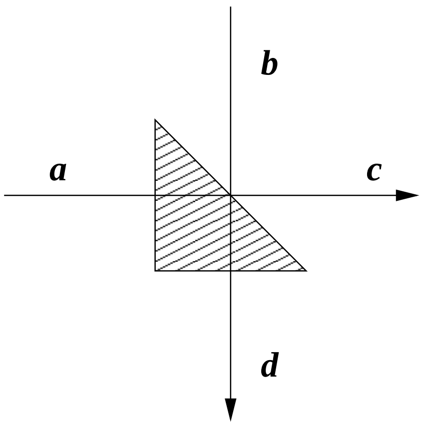
1. **Aufwärmen:** Hier ein paar Dinge zum Warmwerden.

   - Ist der Zustand eines Spins
   $$\rho = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}? \qquad (1)$$
   rein oder gemischt?
   (4 Punkte)

   - Wie lautet das Heisenbergsche Unschärfeprinzip für die Pauli-Matrizen X und Z eines Spins?
   (4 Punkte)

   - Wir betrachten die Jordan-Wigner-Transformation, die die fermionischen Operatoren n fermionischer Moden mit n Spins verknüpft, in der Ordnung $1, 2, \ldots, n$. Wie lautet die Spindarstellung von
   $$f_5^\dagger f_7? \qquad (2)$$
   (4 Punkte)

2. **Interferenz:** Gegeben sei ein Strahlteiler:



Die einlaufenden Felder werden beschrieben durch **fermionische** Modenoperatoren $\{a_1, \ldots, a_n\}$ und $\{b_1, \ldots, b_n\}$. Für die auslaufenden Felder $\{c_1, \ldots, c_n\}$ und $\{d_1, \ldots, d_n\}$ gelten die Beziehungen
$$\begin{aligned} c_k &= \tau a_k - \rho b_k \,, \\ d_k &= \rho a_k + \tau b_k \,. \end{aligned} \qquad (3)$$
für alle k. Dabei seien τ und ρ reell und positiv.

   - Welche zusätzliche Bedingung müssen ρ und τ dazu erfüllen, dass $\{c_k\}$ und $\{d_k\}$ einen vollständigen Satz fermionischer Modenoperatoren bilden. Was ist die physikalische Bedeutung dieser Bedingung?
   (4 Punkte)

   - Die einlaufenden Felder seien in dem Zustand mit Zustandsvektor
   $$|\Psi\rangle \;=\; a_{K_0}^\dagger b_{K_0}^\dagger |\emptyset\rangle \qquad (4)$$
   präpariert, mit einer festen Wellenzahl K_0.
   Bestimmen Sie den Zustand der auslaufenden Felder. Ist der Zustand ein Produktzustand?
   (4 Punkte)

   - An den beiden Ausgängen c und d stehen Detektoren, die die Anzahlen n_c und n_d der auftreffenden Teilchen zählen. Welche Detektionsereignisse (n_c, n_d) (also Paare von Messergebnissen n_c, n_d) sind möglich, und mit welchen Wahrscheinlichkeiten treten sie auf?
   (4 Punkte)

3. **Feldoperatoren:** Wir definieren den Operator
$$b = \int dx\, \phi(x) \Psi(x) \,, \qquad (5)$$
wobei ϕ eine komplexe Funktion und Ψ ein *bosonischer* Feldoperator ist.

   - Berechnen Sie die Kommutatoren
   $$[b, b],\; [b, b^\dagger]. \qquad (6)$$
   Welche Bedingung muss die Funktion ϕ erfüllen, damit b ein bosonischer Modenoperator wird?
   (6 Punkte)

   - Berechnen Sie den *Kommutator*
   $$[n, b] \,, \qquad (7)$$
   wo n der Operator der Gesamtteilchenzahl ist, und interpretieren Sie das Ergebnis!
   (4 Punkte)

4. **Drehimpulse:** Gegeben sei ein Elektron auf einer Kugeloberfläche. Sein Hilbertraum wird aufgespannt durch die Vektoren

$$|l, m, \sigma\rangle\,; \tag{8}$$

l, m und σ sind die üblichen Quantenzahlen für *Bahndrehimpulsquadrat* L^2, die *z-Komponente* L_z *des Bahndrehimpulses*, und der *z-Komponente* S_z *des Spins* $\boldsymbol{S}$.

   - Welche Eigenwerte sind für das Betragsquadrat J^2 des Gesamtdrehimpulses

   $$\boldsymbol{J} := \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S} \tag{9}$$

   möglich? Der fette Drucksatz deutet hier Vektoren an.

   (4 Punkte)

   - Welche der Basisvektoren $|l, m, \sigma\rangle$ benötigen Sie, um den Eigenraum zur Quantenzahl $J = 1/2$ aufzuspannen?

   (4 Punkte)

5. **Kohärenz:** Diese Aufgabe ist etwas umfangreicher, jedenfalls im zweiten Teil. Gegeben sein ein eindimensionales freies *Photonengas* mit Hamiltonoperator

$$H = \sum_k k b_k^\dagger b_k, \tag{10}$$

im thermischen Zustand

$$\rho = \frac{1}{Z}\exp(-\beta H), \tag{11}$$

mit $Z = \mathrm{tr}[\exp(-\beta H)]$.

   - Finden Sie einen Ausdruck für $\langle n_k\rangle$, die mittlere Besetzungszahl der Mode mit Vernichtungsoperator b_k. Zeigen Sie auch, für hinreichend große k ist

   $$\langle n_k\rangle \approx \exp(-\beta k) \tag{12}$$

   die mittlere Besetzungszahl der Mode a_k.

   (6 Punkte)

   - Wir betrachten nun zwei Detektoren

   $$I_1 = \Psi^\dagger(x_1)\Psi(x_1),\ I_2 = \Psi^\dagger(x_2)\Psi(x_2) \tag{13}$$

   im variablen Abstand $\Delta x := x_2 - x_1$, wobei $\Delta x \neq 0$ ist. Die Detektoren sind empfindlich im Intervall $[K_0, K_0 + \Delta K]$, wo $\langle n_k\rangle \approx \exp(-\beta k)$ erfüllt sei.

   Zeigen Sie, dass näherungsweise gilt:

   $$\langle I_1 I_2\rangle \propto \sum_{k,k'=K_0}^{K_0+\Delta K}(1 + e^{-i(k-k')(x_2-x_1)})\langle n_k\rangle\langle n_{k'}\rangle\,. \tag{14}$$

   (4 Punkte)

   - Folgern Sie daraus:

   $$\begin{aligned}\langle I_1 I_2\rangle &\propto \left|\int_{K_0}^{K_0+\Delta K} dk\, e^{-\beta k}\right|^2 \\ &+ \left|\int_{K_0}^{K+0+\Delta K} dk\, e^{-\beta k - ik\Delta x}\right|^2 \\ &= e^{-\beta K_0}\left(\left|\int_0^{\Delta K} dk\, e^{-\beta k}\right|^2\right. \\ &+ \left.\left|\int_0^{\Delta K} dk\, e^{-\beta k - ik\Delta x}\right|^2\right).\end{aligned} \tag{15}$$

   (8 Punkte)

   - Berechnen Sie die Integrale und interpretieren Sie das Ergebnis; unterscheiden Sie insbesondere die Fälle $\Delta x \ll \beta$ und $\Delta x \gg \beta$.

   (4 Punkte)

6. **Textaufgaben:** Zuletzt zwei Textaufgaben, die lediglich kurz (!) in Worten mit einem qualitativen Argument in Worten beantwortet werden sollen, nur ggf. mit einer Gleichung untermauert.

   - Wieso kann das Anregungsspektrum von schwach wechselwirkenden Bosonen zum Phänomen der Superfluidität führen?

   (5 Punkte)

   - Wie unterscheidet sich das Spektrum eines kritischen Gittersystems von dem eines nichtkritischen? Wieso kann es in einem endlichen System keine kritischen Phänomene geben?

   (5 Punkte)