Quanten-Information, WS08/09: Übungsblatt 1

Übung zur Vorlesung "Quanten-Information", gehalten von Jens Eisert an der Universität Potsdam, Physik, WS08/09. Ausgabe: 25 Oktober 2008. Für Rückfragen bitte Email an jense[at]qipc.org.

1. *Zustandsvektoren 1:* Schreibe für den Zustandsvektor

$$|\psi\rangle = (|0,0\rangle + |1,1\rangle)/\sqrt{2} \tag{1}$$

den Zustandsvektor $|\psi\rangle^{\otimes 2}$ explizit in der Produktbasis aus.

2. *Zustandsvektoren 2:* Welcher der folgenden Vektoren ist normiert

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= -\frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle, &(2)\\ |\psi_2\rangle &= \cos(x)|0\rangle + \sin(x)|1\rangle, &(3)\\ |\psi_3\rangle &= \cos^2(x)|0\rangle + \sin^2(x)|1\rangle, &(4)\end{aligned}$$

für reelles x.

3. *Grundlagen der Quantentheorie:* Gib die Matrixform der Operatoren den Operatoren

$$M_1 = \mathbb{1} \otimes \sigma_x,\ M_2 = \sigma_x \otimes \mathbb{1} \tag{5}$$

in der Standardbasis an, wobei σ_x die x-Paulimatrix bezeichnet.

- Wie lauten die Eigenwerte von $M = M_1 + iM_2$?
- Wie die singulären Werte?
- Gib die Polarzerlegung von M an.

4. *Matrizen und singuläre Werte:* Wie stehen die singulären Werte einer hermitschen Matrix in Bezug zu ihren Eigenwerten?

5. *Unmögliche Maschinen:* Wir haben gesehen, daß die Annahme, daß man unbekannte quantenmechanische Zustände perfekt kopieren kann – zusammen mit einem empirischen Befund über Korrelationsmessungen – zu absurden Konsequenzen führt: Insbesondere könnte man so superluminal kommunizieren. Für dieses Argument mußten wir die Quantentheorie nicht verwenden.

Zeige nun (im Rahmen des Formalismus der Quantenmechanik), daß es keinen unitären Operator U geben kann, der einen unbekannten Zustandsvektor $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A$ und $|0\rangle \in \mathcal{H}_B$ stets auf zwei identische Kopien des Eingangs abbildet. Es gibt also kein unitäres U auf $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, so daß für beliebige unbekannte $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A$

$$U|\psi\rangle \otimes |0\rangle = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle \tag{6}$$

gilt.

6. *Symplektische Diagonalisierung* (etwas fortgeschritten): Vergewissere Dich, daß der folgende Hamiltonoperator ein sinnvoller Hamiltonoperator eines Systems von zwei gekoppelten harmonischen Oszillatoren ist:

$$H = \frac{1}{2}(X_1, X_2, P_1, P_2)A(X_1, X_2, P_1, P_2)^T, \tag{7}$$

wobei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & 1 & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & 1 & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & 1 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Zeige, daß man die Oszillatoren "entkoppeln" kann und den Hamiltonoperator in neuen Orten und Impulsen (x_1, x_2, p_1, p_2) schreiben kann als

$$H = \frac{d_1}{2}(x_1^2 + p_1^2) + \frac{d_2}{2}(x_2^2 + p_2^2). \tag{9}$$

Wie lauten dann die Zahlen d_1 und d_2?