Quanten-Information, WS08/09: Übungsblatt 2

Übung zur Vorlesung "Quanten-Information", gehalten von Jens Eisert an der Universität Potsdam, Physik, WS08/09. Ausgabe: 8. November 2008. Für Rückfragen bitte Email an jense[at]qipc.org.

7. *Messungen:* Welche der folgenden Operatoren bilden vollständige Sätze von Meßoperatoren

$$\begin{aligned} M_1 &= |+\rangle\langle+|,\, M_2 = |-\rangle\langle-|; &(1)\\ M_1 &= (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 0|)/2, \\ M_2 &= |0\rangle\langle 0|/2, \\ M_3 &= |0\rangle\langle 0|/2 + |1\rangle\langle 1|; \\ M_1 &= (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 0|)/2, \\ M_2 &= |0\rangle\langle 0|/2 + |1\rangle\langle 1|, \\ M_3 &= -|0\rangle\langle 0|/2 - |1\rangle\langle 1|. &(2) \end{aligned}$$

8. *"Steering":* Gegeben sei ein bipartiter Zustand mit Zustandsvektor $|\psi\rangle = (|0,0\rangle + |1,1\rangle)/\sqrt{2}$, definiert auf zwei Teilen, die A und B genannt sind. Zeige, daß man für jeden Zustandvektor $|\phi\rangle \in \mathbb{C}^2$ Sätze von Meßoperatoren $\{M_j\}$ finden kann, so daß für *einen* der Meßausgänge mit Operator M_1

$$\mathrm{tr}_A((M_1 \otimes \mathbb{1})|\psi\rangle\langle\psi|(M_1^\dagger \otimes \mathbb{1})) = c|\phi\rangle\langle\phi| \qquad (3)$$

gilt, für eine Zahl c. Das heißt, mit einer geschickten Messung im ersten Teil kann man den zweiten Teil in einen beliebigen reinen Zustand projizieren. Könnte man mit einer solchen Messung Information übertragen? Diese Eigenschaft bemerkte schon Schrödinger in den 30ern.

9. *Schmidtzerlegung:* Finde die Schmidt-Zerlegungen der folgenden (unnormierten) bipartiten Zustandsvektoren:

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= |0,0\rangle + |0,1\rangle + |2,0\rangle, &(4)\\ |\psi_2\rangle &= |0,0\rangle + |1,1\rangle + |2,2\rangle, &(5)\\ |\psi_3\rangle &= |0,0\rangle + |1,1\rangle + |2,0\rangle. &(6) \end{aligned}$$

10. *Schmidtzerlegung von tripartiten Systemen:* Warum kann es keine Schmidt-Zerlegung von allgemeinen tripartiten reinen Zuständen geben? Dies wäre für einen beliebigen Zustandsvektor $|\psi\rangle \in (\mathbb{C}^d)^{\otimes 3}$ eine Wahl von Orthonormalbasen $\{|j_A\rangle\}$, $\{|k_B\rangle\}$, $\{|l_C\rangle\}$, so daß

$$|\psi\rangle = \sum_{j=0}^{d-1} \sqrt{\lambda_j}|j_A, j_B, j_C\rangle \qquad (7)$$

mit $\sum_{j=0}^{d-1} \lambda_j = 1$.

11. *Schmidtzerlegung von gemischten Zuständen:* In welchen Sinne ist eine Schmidt-Zerlegung für gemischte Zustände vorstellbar?

12. *Zustandsunterscheidung:* Gegeben sei eine Maschine, die mit a-priori-Wahrscheinlichkeit $p_1 = p_2 = 1/2$ die nicht orthogonalen Zustandsvektoren $|\psi_1\rangle = |0\rangle$ und $|\psi_2\rangle = \sqrt{1/3}|0\rangle + \sqrt{2/3}|1\rangle$ präpariert. Finde einen Satz von POVMs, die diese beiden Zustände unterscheiden können, sofern es nur einen dritten Ausgang gibt, der sich nicht zwischen $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ festlegt. Wie lautet die beste Wahrscheinlichkeit, mit der man – ohne sich jemals zu irren – sagen kann, daß $|\psi_1\rangle$ oder $|\psi_2\rangle$ vorlagen?