

Quanten-Information, WS08/09: Übungsblatt 5

Übung zur Vorlesung "Quanten-Information", gehalten von Jens Eisert an der Universität Potsdam, Physik, WS08/09. Ausgabe: 10. Januar 2009. Für Rückfragen bitte Email an jense[at]qipic.org.

24. *"Procustean" Filteroperationen:* Gegeben sei ein reiner Zustand zweier qubits mit Zustandsvektor $|\psi\rangle = \lambda^{1/2}|0,0\rangle + (1-\lambda)^{1/2}|1,1\rangle$ mit $\lambda \in [0, 1]$. Wir wissen, dass dieser Zustand genau für $\lambda = 1/2$ maximal verschränkt ist und eine destillierbare Verschränkung von $D(|\psi\rangle\langle\psi|) = S(\text{tr}_B(|\psi\rangle\langle\psi|))$ aufweist. Diese bezieht sich auf die optimale Rate, mit der wir asymptotisch maximal verschränkte Zustände fast deterministisch mit LOCC extrahieren können. So weit so gut.

Einen einzigen Zustand können wir offensichtlich nicht in einen maximal verschränkten Zustand transformieren (außer natürlich für $\lambda = 1/2$). Wir können dies aber, wenn wir probabilistische Protokolle erlauben. Wie lautet ein probabilistisches Protokoll, das mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit operiert, und im Falle des Erfolges einen Zustandsvektor $(|0,0\rangle + |1,1\rangle)/\sqrt{2}$ übriglässt? Wie lautet die optimale Erfolgswahrscheinlichkeit? Wie steht diese im Verhältnis mit der destillierbaren Verschränkung $D(|\psi\rangle\langle\psi|)$?

25. *Untere Schranke für destillierbare Verschränkung:* Eine untere Schranke für die destillierbare Verschränkung ist für alle bipartiten Zustände

$$D(\rho) \geq S(\text{tr}_B(\rho)) - S(\rho). \quad (1)$$

Diese Schranke kann auch negativ werden (und ist dann nutzlos, weil ja schon 0 eine untere Schranke ist), und ist für reine Zustände scharf. Diese Schranke heißt "hashing bound". Berechne diese Schranke für die Zustände zweier qubits

$$\rho = \lambda|\psi^-\rangle\langle\psi^-| + (1-\lambda)\mathbb{1}/4 \quad (2)$$

als Funktion von $\lambda \in [0, 1]$.

26. *Gebundene Verschränkung:* (Schwierig) Wir wissen, dass es gebunden verschränkte Zustände gibt: Dies sind gemischte verschränkte Zustände ρ , deren destillierbare Verschränkung verschwindet, also für die $D(\rho) = 0$ ist. Warum kann es keine Zustände geben für zwei qubits, also mit $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, die gebunden verschränkt sind?
27. *Destillationsprotokoll:* Viele praktische Destillationsprotokolle operieren auf der Basis, dass sie zwei Paare mit lokalen unitären Operationen verschränken, dann eine lokale Messung ausführen und das Ergebnis akzeptieren, falls man einen von mehreren erlaubten Messausgängen erhält. Was ist die optimale Rate, mit der solche Destillationsverfahren bestmöglich operieren können? Wie hoch kann im Prinzip im Erfolgsfall am Ende die Fidelität mit einem maximal verschränkten Zustand sein?

28. *Universelle Quantengatter:* Zeige, dass es sehr wohl universelle Gattersätze gibt, die lediglich aus einem Element bestehen. Einzelne feste unitäre Operationen können also schon universell sein.