

## Theoretische Physik V, Quanten-II: Übungsblatt 11 (20 Punkte)

Übung zur Vorlesung "Quanten-II", gehalten von Jens Eisert an der Universität Potsdam, Physik, SS09. Für Rückfragen bitte Email an [jense\[at\]qipc.org](mailto:jense[at]qipc.org), [timo.felbinger\[at\]qipc.org](mailto:timo.felbinger[at]qipc.org) und [albrecht\[at\]rz.uni-potsdam.de](mailto:albrecht[at]rz.uni-potsdam.de)

26. **Normalmodenzerlegung:** Gegeben sei eine  $2n \times 2n$ -Matrix  $M$ , die strikt positiv ist, also alle ihre Eigenwerte sind strikt positiv. Nun kann man immer ein  $S \in Sp(2n, \mathbb{R})$  finden, so dass

$$SMS^T = \text{diag}(d_1, \dots, d_n, d_1, \dots, d_n). \quad (1)$$

Diese Einsicht ist die Grundlage der Normalmodenzerlegung, die in vielen Systemen in der Optik und Festkörperphysik so wichtig ist.

- Zeigen Sie, dass die  $(d_1, \dots, d_n)$  die positiven Wurzeln der Eigenwerte von  $-\sigma M \sigma M$  sind. Dies ist erstaunlich einfach zu zeigen.

(8 Punkte)

- Wie lautet  $S$ , um die Diagonalform zu erreichen? Dies ist schon schwieriger. (Hinweis: Für orthogonale Matrizen  $V \in O(n)$  ist immer

$$O \oplus O \in Sp(2n, \mathbb{R}), \quad (2)$$

und

$$\text{diag}(q_1, \dots, q_n, 1/q_1, \dots, 1/q_n) \in Sp(2n, \mathbb{R}) \quad (3)$$

für  $q_k > 0$  für alle  $k$ .

(2 Punkte)

27. **Nochmals Entropien:** Für Gaußsche bosonische Zustände von  $n$  Moden, leiten Sie die Formel

$$S(\rho) = \sum_{j=1}^n \left( \frac{d_j + 1}{2} \log \frac{d_j + 1}{2} - \frac{d_j - 1}{2} \log \frac{d_j - 1}{2} \right), \quad (4)$$

für die von-Neumann-Entropie  $S(\rho) = -\text{tr}[\rho \log \rho]$  her, wobei  $\{d_j\}$  die symplektischen Eigenwerte von  $\gamma$  sind, der Kovarianzmatrix von  $\rho$ .

(8 Punkte)

28. **Quantenphasenübergänge:** Wir betrachten das Ising-Modell

$$H = -\frac{1}{2} \sum_j (X_j X_{j+1} + Z_j). \quad (5)$$

Ist dieses Modell im thermodynamischen Limes kritisch oder hat es eine Energielücke?

(2 Punkte)