Theoretische Physik V, Quanten-II: Übungsblatt 3 (20 Punkte)

Übung zur Vorlesung “Quanten-II”, gehalten von Jens Eisert an der Universität Potsdam, Physik, SS09. Für Rückfragen bitte Email an jense[at]qipc.org, timo.felbinger[at]qipc.org und albrecht[at]rz.uni-potsdam.de

8. **Ununterscheidbare Bosonen:** Wir betrachten zwei ununterscheidbare bosonische Teilchen ohne Spin, wie in der Vorlesung mit symmetrisierter Wellenfunktion

$$\psi(x_1,x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) + \psi_1(x_2)\psi_2(x_1)). \qquad (1)$$

Wir fragen nun nach der Teilchenzahldichte in einem Punkt x, also

$$\rho(x) = \int dx_2 |\psi(x,x_2)|^2 + \int dx_1 |\psi(x_1,x)|^2. \qquad (2)$$

Für die normierten Wellenfunktionen

$$\psi_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{-|x-c_1|^2}, \qquad (3)$$

$$\psi_2(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{-|x-c_2|^2}, \qquad (4)$$

$$\qquad (5)$$

mit $c_1 = -10$, $c_2 = 10$. Wie groß ist der Fehler, wenn man für $x = c_1$ die Teilchenzahldichte nicht nach Gl. (2) berechnet, sondern die Symmetrisierung vergißt und einfach

$$\rho'(x) = |\psi_1(x)|^2 \qquad (6)$$

berechnet?

(5 Punkte)

9. **Fermionische Kommunikation:** Sei ein System zweiter fermionischer Moden gegeben, im Zustandsvektor in zweiter Quantisierung

$$|\psi\rangle = (|n_1, 0\rangle + |n_1, 1\rangle)/\sqrt{2}. \qquad (7)$$

Nun messen wir den Erwartungswert des hermitischen Operators $m_2 = (f_2 + f_2^\dagger)/\sqrt{2}$,

$$E = \langle\psi|m_2|\psi\rangle. \qquad (8)$$

Was erhalten wir?

Wie kann man nun in Mode 2 ablesen, ob ein Teilchen in Mode 1 liegt? Wieso wäre dies eine Verletzung von Kausalität? Worin liegt der Haken dieses Arguments?

(5 Punkte)

10. **Harmonische Kette:** Betrachte eine Kette von gekoppelten harmonischen Oszillatoren mit Einheitsmasse und -frequenz, mit Hamiltonoperator

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} P_j^2 + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} X_j V_{j,k} X_k, \qquad (9)$$

wobei

$$V = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ & 1 & 3 & 1 & 0 & \\ \ddots & & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & 1 & 3 \end{bmatrix}. \qquad (10)$$

Eine solche Matrix, die in offensichtlicher Weise Translationsinvarianz inkorporiert, heißt auch zyklisch. Es sind also immer nächste Nachbarn entkoppelt. Zeige, dass man diese Kette entkoppeln kann, indem man neue Koordinaten einführt, die wiederum die kanonischen Kommutationsrelationen erfüllen. Wie lautet der Hamiltonoperator in der entkoppelten Form?

(10 Punkte)