

Theoretische Physik V, Quanten-II: Übungsblatt 4 (20 Punkte)

Übung zur Vorlesung "Quanten-II", gehalten von Jens Eisert an der Universität Potsdam, Physik, SS09. Für Rückfragen bitte Email an jense[at]qipc.org, timo.felbinger[at]qipc.org und albrecht[at]rz.uni-potsdam.de

11. Wirkung von Feldoperatoren auf Zustandsvektoren:

$$\Psi(\xi)|\psi_N\rangle = \sqrt{N} \int d\xi_1 \dots d\xi_{N-1} \quad (1)$$

$$\times \psi_S(\xi_1, \dots, \xi_{N-1}, \xi) \Psi^\dagger(\xi_{N-1}) \dots \Psi^\dagger(\xi_1)|\phi\rangle$$

gilt.

(10 Punkte)

12. Teilchen auf dem Kreis:

Wir betrachten Teilchen auf dem Einheitskreis: Der Raum der 1-Teilchen-Zustände wird aufgespannt durch die Funktionen

$$\psi_j(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ij\xi}, j \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Wir definieren die Modenoperatoren $\{b_j\}$ und Feldoperatoren Ψ als Funktion von ξ in der üblichen Weise.

- Die bekannten Operatoren X und P würde man gerne als

$$P = \sum_j j b_j^\dagger b_j \quad (3)$$

und

$$X = \int_0^{2\pi} d\xi \xi \Psi^\dagger(\xi) \Psi(\xi) \quad (4)$$

definieren. P ist so auch ok, aber X ist sehr problematisch, warum?

- Statt X betrachtet man besser den Operator

$$T_k = e^{ikx} \quad (5)$$

wo k ein Impuls-Eigenwert ist, Weyl-Operator genannt. Was erwarten Sie für den Kommutator $[T_k, P]$ im Kontext der Quanten-I, und was finden Sie im Kontext der Quanten-II mit den obigen Definitionen von X und P ?

- Ein 1-Teilchen-Zustandsvektor kann geschrieben werden als

$$|\chi(t)\rangle = \int_0^{2\pi} d\xi \chi(\xi, t) \Psi^\dagger(\xi)|0\rangle, \quad (6)$$

und es gilt die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} |\chi(t)\rangle = -iH|\chi(t)\rangle, \quad (7)$$

mit dem Hamiltonoperator

$$H = \frac{p^2}{2m} + V, \quad (8)$$

$$V = \int d\xi V(\xi) \Psi^\dagger(\xi) \Psi(\xi). \quad (9)$$

Zeigen Sie: die "Wellenfunktion" $\chi(\xi, t)$ erfüllt die Schrödingergleichung

$$i \frac{\partial}{\partial t} \chi(\xi, t) = -\frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \chi(\xi, t) + V(\xi) \chi(\xi, t). \quad (10)$$

(10 Punkte)