

Theoretische Physik V, Quanten-II: Übungsblatt 5 (20 Punkte)

Übung zur Vorlesung "Quanten-II", gehalten von Jens Eisert an der Universität Potsdam, Physik, SS09. Für Rückfragen bitte Email an jense[at]qipc.org, timo.felbinger[at]qipc.org und albrecht[at]rz.uni-potsdam.de

13. **Schödingergleichung für Feldoperatoren:** Zeigen Sie, dass bosonische Feldoperatoren, die sich im Heisenbergbild wie

$$\Psi(\xi, t) = e^{iHt/\hbar} \Psi(\xi, 0) e^{-iHt/\hbar} \quad (1)$$

in der Zeit entwickeln, in der differentiellen Form die nichtlineare Schödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\xi, t) = \left(-\frac{\hbar^2 \Delta}{2M} + V_1(\xi) \right) \Psi(\xi, t) + \int d\xi' \Psi^\dagger(\xi', t) V_2(\xi, \xi') \Psi(\xi', t) \Psi(\xi, t) \quad (2)$$

erfüllen.

(4 Punkte)

14. **Neutronenstern (klein):** Gegeben seien zwei Neutronen, die nur gravitativ über das Potential

$$V(x_1, x_2) = -\frac{Gm_N^2}{|x_1 - x_2|} \quad (3)$$

wechselwirken, wo G die Gravitationskonstante und m_N die Neutronenmasse ist.

- Finden Sie die gebundenen Energie-Eigenzustände.
- Welchen Radius hat ein solches System im Grundzustand?

(6 Punkte)

15. **Neutronenstern (groß):** Nun suchen wir einen gebundenen Zustand von $N \gg 1$ Neutronen, die wieder nur gravitativ wechselwirken — also das, was die Astrophysik "Neutronenstern" nennt.

Die Neutronen sind in einem Potentialtopf Φ gefangen, der durch ihre eigene Gravitation erzeugt wird. Wir nehmen Φ als Funktion von r also perfekt radialsymmetrisch an (vernachlässigen also insbesondere die Rotation des Sterns); ferner seien die Neutronen "kalt" (alle Zustände bis zur Fermi-Kante ε_F sind besetzt, alle anderen unbesetzt), und nicht-relativistisch.

- Zeigen Sie: aus der Poisson-Gleichung $\Delta\Phi = 4\pi m_N G \rho$ folgt für das Potential die Differentialgleichung (DGL)

$$\Delta\Phi = K (\varepsilon_F - \Phi)^{3/2} \quad (4)$$

mit

$$K = \frac{8\sqrt{2}Gm_N^{7/2}}{3\pi\hbar^3}. \quad (5)$$

Leiten Sie durch Substitution

$$u(r) = -r\Phi(r) \quad (6)$$

und geschickte Wahl des Potentialnullpunktes die DGL

$$u''(r) = -K r^{-1/2} u^{3/2}(r) \quad (7)$$

her. Diese *Lane-Emden'sche Differentialgleichung* kann man leider nicht analytisch lösen. Da u ungerade sein muss, machen wir den Reihenansatz

$$u(r) = \phi_0 r + \alpha r^3 + \beta r^5 + O(r^7) \quad (8)$$

und nähern maximal brutal, indem wir nach dem r^3 -Term abbrechen.

Das Problem hat nur einen freien Parameter, zum Beispiel ϕ_0 , also die maximale Tiefe des Potentialtopfes. Bestimmen Sie den abhängigen Parameter α aus der Asymptotik bei $r = 0$.

Berechnen Sie nun den Sternradius R , die Sternmasse M in Einheiten der Sonnenmasse, und den Zusammenhang $R = R(M)$. Vergleichen Sie mit der vorherigen Aufgabe.

- Bis zu wieviel Sonnenmassen ist die nichtrelativistische Näherung gerechtfertigt? Begründen Sie, dass man darüber nicht nur speziell-relativistisch, sondern in Schwarzschild-Metrik rechnen muss. Vergleichen Sie R mit dem Schwarzschildradius R_S des Sterns; ab wieviel Sonnenmassen verschwindet der Stern hinter dem Ereignishorizont?

(10 Punkte)